Exercice 1

Le mouvement est un mouvement circulaire uniforme, l'accélération a donc seulement un composant perpendiculaire, $\vec{a}_{cp}$. La vitesse angulaire est donnée par $\omega_0 = \frac{2\pi 100}{60} \, {}^1\!/_\mathrm{s} = 10.5 \, {}^1\!/_\mathrm{s}$ car le volant fait 100 tours en une minute. La module de la vitesse est donné par $v_t = r\omega_0 = 15.7 \, {}^\mathrm{m}\!/_\mathrm{s}$, et la module de l'accélération d'un point sur la jante par $a_{cp} = \frac{v_t^2}{r} = r\omega_0^2 = 164.5 \, {}^\mathrm{m}\!/_{\mathrm{s}^2}$.

Exercice 2

La vitesse selon x est donnée et constante, la vitesse selon y peut être déterminée en calculant la dérivée temporelle de la position $y(t)$:

$$v_x = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2xv_x = 6x \tag{1}$$

Le fait que nous ayons trouvé qu'une vitesse égale à la position devrait sonner une alarme. En fait, déjà l'équation de départ $y = x^2$ est suspicieux. Pour être consistant au niveau des dimensions, une constante c dont la valeur est 1 est implicite la formule, et sa dimension est 1/m : $y = cx^2$. Cette constante se propage dans toutes les formules, remettant les unités à leur place.
Le module de la vitesse peut être calculé comme suit :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36x^2 + 9} \tag{2}$$

La vitesse selon x est constante, donc cette composante de l'accélération est zéro, et le module de l'accélération est égale à sa composante y :

$$a_y = \frac{d(6x)}{dx}\frac{dx}{dt} = 18 \, {}^\mathrm{m}\!/_{\mathrm{s}^2} \tag{3}$$

Quand $x = \frac{2}{3}$ m, la vitesse est $\vec{v} = (3, 4)$ m/s et son module est donc $|v| = 5$m/s. L'accélération étant constant, sa valeur est $|a| = 18 \, {}^\mathrm{m}\!/_{\mathrm{s}^2}$, et point dans le sens positive de l'axe y.

Exercice 3

Il s'agit du mouvement balistique. Nous choisissons le repère avec l'origine au départ de tir, l'axe y verticale et l'axe x horizontale, dans le plan défini par l'axe y et le vecteur de la vitesse de départ.Les composants de la position et de la vitesse sont données par les équations générales :

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \tag{4}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_0}{2}t^2 \tag{5}$$

$$v_x(t) = v_{0x} \tag{6}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_0 t \tag{7}$$

Avec le chois du repère, $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 300\,\mathrm{m}$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 520\,\mathrm{m}$, et $a_0 = -g = -9.81\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

a) La portée horizontale est déterminé par la duré du tir, multiplié par la vitesse horizontale. La durée pour sa part est déterminée par le moment où le projectile touche le sol : $x(t = t_{tir}) = 0$. Cette équation à deux solutions, dont $t_{tir} = \frac{2v_{0y}}{g}$ est qui nous est utile. Placer cette solution dans l'équation $x(t)$ nous donne $x_{max} = 31.8\,\mathrm{km}$.

b) A l'apogée de son orbite, la vitesse verticale est zéro, $v_{0y} - gt_{max} = 0$, donc $t_{max} = \frac{v_0 y}{g}$, et le placement de ce temps dans l'équation (5) donne $y_{max} = 13.8\,\mathrm{km}$.

c) Trouver la vitesse et la position à $t = 30$ s est un calcul simple dont on donne le résultat : $\vec{r} = (9, 11.2)$ km, $\vec{v} = (300, 226)$ m/s.

d) Il faut d'abord résoudre l'équation $10000 = v_{0y}t - \frac{2}{2}t^2$ pour trouver les deux instants où le projectile se trouve à $y = 10$km, puis trouver les positions et les vitesses avec ces temps. Les deux solutions sont $t_1 = 25.3$ s et $t_2 = 80.8$ s, menant à $\vec{r_1} = (7.6, 10)$ km et $\vec{r_2} = (24.2, 10)$ km. Les vitesses selon y sont $v_{y1} = 272\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ et $v_{y2} = -273\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$.

   On note que les vitesses verticales sont de signe opposés. Par la symétrie du problème, en principe $v_{y1} = v_{y2}$, la différence et dû à des calculs à précision finie, et les résultats intermédiaires arrondis. Néanmoins, les différences sont dans le troisième chiffre, ce qui est une précision suffisante dans notre calcul car une des données (10km) comportait seulement deux chiffres significatifs.

Exercice 4

On sait que la vitesse est le dérivé temporaire de la position, et l'accélération est le dérivé temporaire de la vitesse, on trouve donc $\vec{v} = (2t, 2t - 2){}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ et $\vec{a} = (2, 2){}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

Exercice 5

Soit $v_0 = 40\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$, $h_0 = 1$ m et $\alpha = 30°$. La balle lancée depuis cette hauteur initiale avec cette vitesse initiale et l'angle, suit un trajectoire parabolique, et ses coordonnées sont données par les équations suivantes :

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \tag{8}$$

$$y(t) = h_0 + v_0 \sin\alpha t - \frac{g}{2}t^2 \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Nous avons prie comme origine de la position horizontale l'endroit ou la balle est frappée.
En langage mathématique, les moments ou la balle peut être interceptée sont le moments ou sa position verticale $y(t) = 2.4$ m. Les deux solutions de cette équation quadratique sont $t_1 = .071$ s et $t_2 = 4.01$ s. La position horizontale de la balle a ce deux instants est $x_1 = 2.5$ m et $x_2 = 138.9$ m.
Le second joueur peut donc attraper la balle a ce deux endroits, et il faut qu'il y arrive dans les temps donnés. Pour le faire en x_1, il doit couvrir le 117,5 m de distance en 0.071 s, soit courir

avec une vitesse de 1650 m/s, cirque fois la vitesse du son. S'il se décide pour x_2, il doit couvrir 18.9 m en 4.01 s soit 4.7 m/s. Cette vitesse donnerait 21 s sur 100 m, atteignable même pour un enseignant de physique.